Brief history of semiclassical quantization

- **Bohr** (1913):

Quantization of the angular momentum

Circular orbits in configuration space.

$$L = n\hbar$$

- **Wilson, Sommerfeld, Epstein, Ishihara**:

Quantization of action integrals

Elliptical orbits in configuration space.

$$\oint p_i dq_i = n_i \hbar$$

- **Einstein** (1917):

Torus quantization

Tori in phase space.

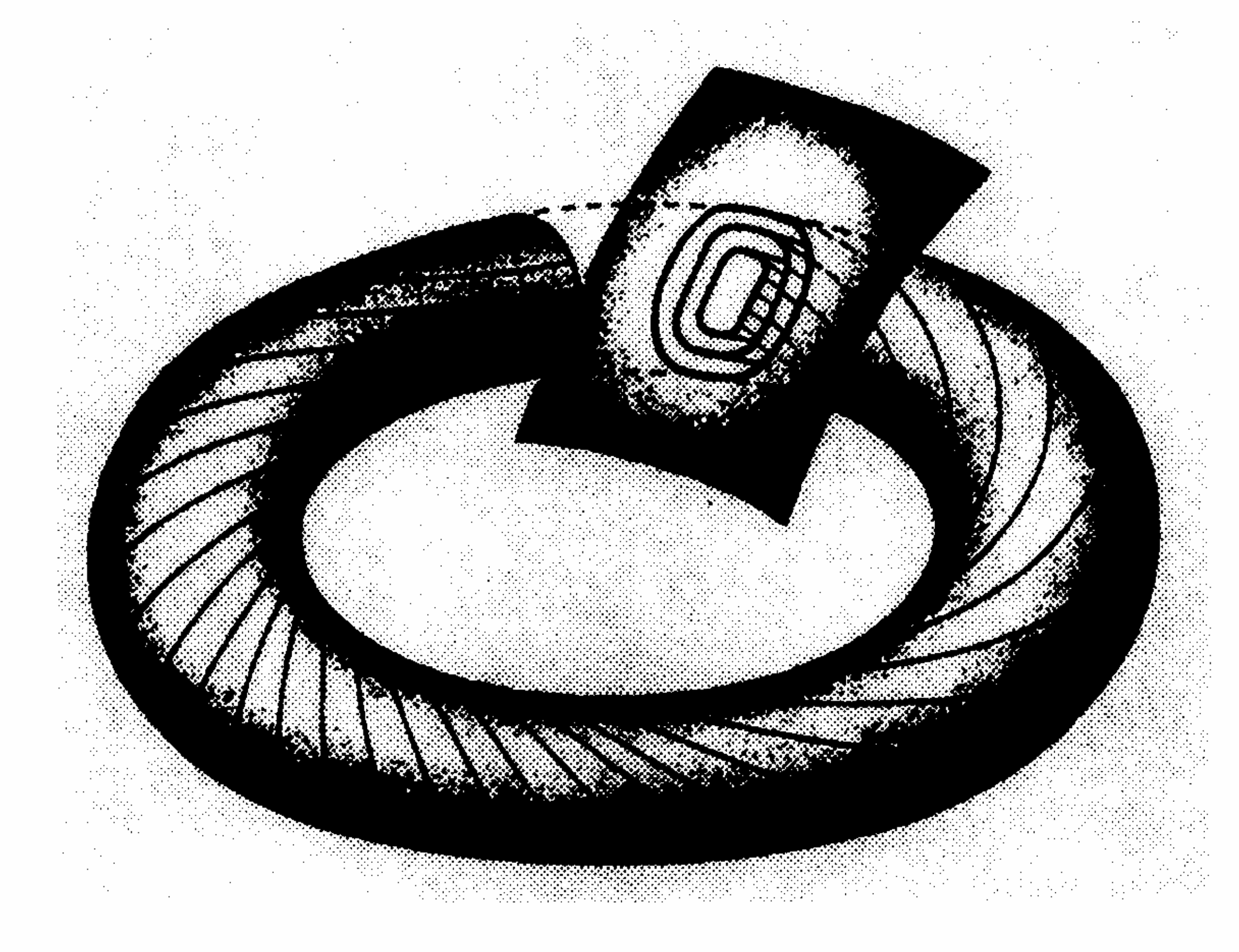
$$\oint_{C_k} p_i dq_i = \left(n_k + \frac{\alpha_k}{4} \right) \hbar$$

EBK condition

"No torus, no way of quantization"

Quantization of chaos? = The first recognition of "quantum chaos"

Torus



Einstein's paper on torus quantization (1917)

Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein;
von A. Einstein.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 11. Mai.)
(Vgl. oben S. 79.)

---

§ 1. Bisherige Formulierung. Es unterliegt wohl keinem Zweifel mehr, daß für periodische mechanische Systeme von einem Freiheitsgrad die Quantenbedingung

$$\int p\,dq = \int p \frac{dq}{dt}\,dt = nh \qquad 1)$$

lautet (Sommerfeld und Debye). Dabei ist das Integral über eine ganze Periode der Bewegung zu erstrecken; q bedeutet die Koordinate, p die zugehörige Impulskoordinate des Systems. Ferner beweisen die spektraltheoretischen Arbeiten Sommerfelds mit Sicherheit, daß bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden an die Stelle dieser einen Quantenbedingung mehrere Quantenbedingungen zu treten haben, im allgemeinen so viele (l), als das System Freiheitsgrade besitzt. Diese l Bedingungen lauten nach Sommerfeld zunächst

$$\int p_i\,dq_i = n_i h. \qquad 2)$$

Da diese Formulierung von der Wahl der Koordinaten nicht unabhängig ist, so kann sie nur bei bestimmter Wahl der Koordinaten zutreffen. Erst wenn diese Wahl getroffen ist und die q_i periodische Funktionen der Zeit sind, enthält das System 2) eine bestimmte Aussage über die Bewegung.

Einen weiteren prinzipiellen Fortschritt verdanken wir noch Epstein (und Schwarzschild). Ersterer gründet seine Regel für die Auswahl der Sommerfeldschen Koordinaten q_i auf Jacobis Theorem, das bekanntlich folgendermaßen lautet: Es sei $H(H[q_i p_i])$ die Hamiltonsche Funktion der q_i und p_i und t, welche in den kanonischen Gleichungen

$$p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad 3)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad 4)$$

früheren Werten der $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ zurückgelange, ist keineswegs zu erwarten; es ist vielmehr im allgemeinen zu erwarten, daß jedesmal, wenn die ins Auge gefaßte Konfiguration der Koordinaten q_i im Laufe der Bewegung wieder annähernd erreicht wird, ein total anderes System der p_i erscheint, so daß es für die unendlich fortgesetzte Bewegung überhaupt unmöglich ist, die p_i als Funktion der q_i darzustellen. Wenn aber die p_i — bzw. eine endliche Zahl von Wertsystemen dieser Größen — bei Wiederkehr der Koordinatenkonfiguration sich wiederholen, so sind die $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ als Funktionen der q_i darstellbar für die unendlich fortgesetzte Bewegung. Existiert also für die unendlich fortgesetzte Bewegung ein p_i-Feld, so existiert auch stets ein zugehöriges Potential J^*.

Wir können daher folgendes aussagen: Existieren l Integrale der $2l$ Bewegungsgleichungen von der Form

$$R_k(q_i, p_i) = \text{konst.}, \qquad 14)$$

wobei die R_k algebraische Funktionen der p_i sind, so ist $\Sigma p_i dq$ immer ein vollständiges Differential, wenn man die p_i vermöge 14) durch die q_i ausgedrückt denkt. Die Quantenbedingung sagt aus, daß das über eine irreduzible Kurve erstreckte Integral $\int \sum_i p_i dq_i$ ein Vielfaches von h sein soll. Diese Quantenbedingung fällt mit der Sommerfeld-Epsteinschen zusammen, wenn im speziellen jedes p_i nur von dem zugehörigen q_i abhängt.

Existieren weniger als l Integrale vom Typus 14), wie dies z. B. nach Poincaré bei dem Problem der drei Körper der Fall ist, so sind die p_i nicht durch die q_i ausdrückbar, und es versagt die Sommerfeld-Epsteinsche Quantenbedingung auch in der hier gegebenen, etwas erweiterten Form.
